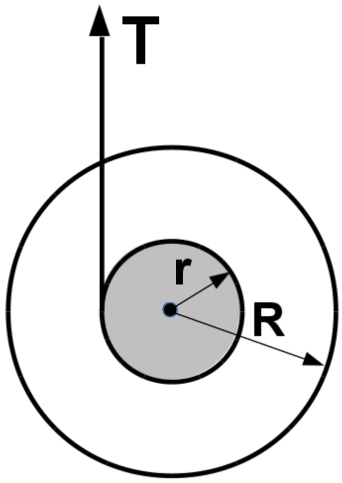
1a Suponha que um ioiô parte do repouso e desce até uma altura (deslocamento vertical) h, medida desde o ponto de onde o ioiô foi solto. Encontrar a sua velocidade final de translação e rotação, e sua aceleração linear. Qual é a tensão na corda nesse instante?

Solução:



Pela conservação da energia temos

$$K_i^t + K_i^r + U_i = K_f^t + K_f^r + U_f$$

onde K é a energia cinética e U, a potencial. O super índice r diz respeito à parte rotacional e t, à translacional. O sub índice i indica a situação no inicio do movimento e o f a final. Como o corpo parte do repouso, a equação anterior fica

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1}$$

onde

$$v = r\omega \tag{2}$$

onde r é o raio desde o centro de massa do ioiô até a parte externa do fio enrolado no seu eixo de rotação. Como o ioiô é quase um cilindro, o momento de inercia estará dado por

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

o qual é o momento de inercia de um cilindro de raio R, que é o raio do ioiô. Substituindo em 1

$$\begin{aligned} 2mgh &= mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{r^2} \\ 2mgh &= mv^2\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right) \end{aligned}$$

de onde

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} \tag{3}$$

Como as forças lineares e angulares são constante durante todo o movimento, podemos utilizar

$$
\begin{aligned}
v\int_{v_i}^{v} dv &= a\int_0^h dy \\
v^2 - v_i^2 &= 2ah
\end{aligned}
$$

de forma que

$$a = \frac{g}{1+\frac{R^2}{2r^2}} \tag{4}$$

De 2

$$\omega^2 = \frac{2gh}{r^2+\frac{1}{2}R^2} \tag{5}$$

Para o calculo da tensão na corda utilizamos um diagrama de corpo livre onde observamos que

$$
\begin{aligned}
\sum F_y =& T - mg \\
ma =& T - mg \\
m\frac{g}{1+\frac{R^2}{2r^2}} =& T - mg \\
T =& m\frac{g}{1+\frac{R^2}{2r^2}} + mg
\end{aligned}
$$

de onde

$$T = mg\frac{\frac{1}{2}R^2}{r^2+\frac{1}{2}R^2} \tag{6}$$

1b Uma bola cai livremente desde uma altura h sobre um plano inclinado que forma um angulo α com a horizontal como mostra a figura 1. Encontre a relação das distancias entre a posição dos pontos nos quais a bola quicando toca o plano inclinado. Considere as colisões com o plano inclinado como sendo totalmente elástica.

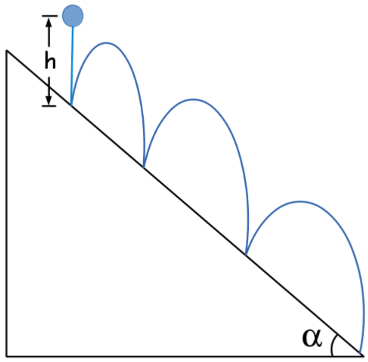
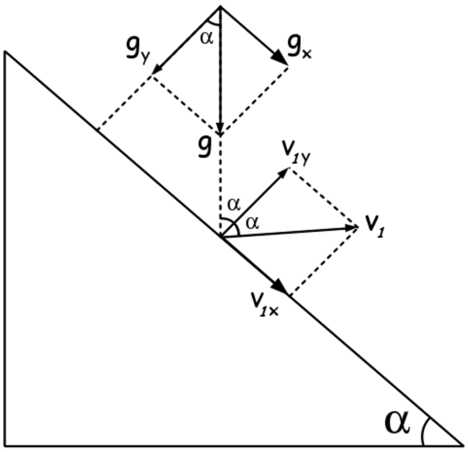


Figura 1: problema

Solução:

Vamos colocar os eixos de coordenadas de tal forma que o eixo x coincida com a hipotenusa do plano inclinado e o y com a normal a este plano. Na figura embaixo podemos observa que com essa referencia a aceleração devida à gravidade pode ser descomposta em g_x e g_y onde



$$
\begin{aligned}
g_x &= g \sin \alpha \\
g_y &= -\, g \cos \alpha
\end{aligned}
$$

da lei de conservação da energia o módulo da velocidade no instante da primeira colisão está dada por

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Como a colisão é totalmente elástica o angulo com que a bola se afasta do plano é o mesmo com o qual chegou ao plano e o módulo da sua velocidade é exatamente o mesmo. O tempo entre as colisões (que é o mesmo para todas as colisões dado que o campo devido à gravidade que age na perpendicular do plano é constante), t_v, está dado por pelo dobro do tempo de subida t_s:

$$
\begin{aligned}
v_{fy} =& v_{1y} + g_y t_s \\
0 =& v_1 \cos\alpha - g\cos\alpha t_s \\
t_s =& \frac{v_1}{g}
\end{aligned}
$$

assim

$$t_v = 2\frac{v_1}{g}$$

A componente horizontal do primeiro quique está dada por $v_{1x} = v_1 \sin\alpha$. Com esse dado podemos calcular a posição onde a bola realizará o segundo quique

$$
\begin{aligned}
l_1 =& x_2 - x_1 \\
=& + v_{1x}t_v + \frac{1}{2}g_x t_v \\
=& (v_1 \sin\alpha)\left(2\frac{v_1}{g}\right) + \frac{1}{2}(g\sin\alpha)\left(2\frac{v_1}{g}\right)^2 \\
=& 4\frac{v_1^2 \sin\alpha}{g} \\
=& 8h\sin\alpha
\end{aligned}
$$

O módulo da componente da velocidade em x com que a bola quica no ponto x_2 está dada por

$$
\begin{aligned}
v_{2x} =& v_{1x} + g_x t_v \\
=& v_1 \sin\alpha + (g\sin\alpha)\left(2\frac{v_1}{g}\right) \\
=& 3v_1 \sin\alpha
\end{aligned}
$$

Com essa velocidade podemos calcular a posição do terceiro quique

$$
\begin{aligned}
l_2 =& x_3 - x_2 \\
=& v_{2x}t_v + \frac{1}{2}g_x t_v \\
=& (3v_1 \sin\alpha)\left(2\frac{v_1}{g}\right) + \frac{1}{2}(g\sin\alpha)\left(2\frac{v_1}{g}\right)^2 \\
=& 4\frac{v_1^2 \sin\alpha}{g} \\
=& 16h\sin\alpha
\end{aligned}
$$

Facilmente se mostra que

$$v_{3x} = 5v_1 \sin\alpha$$

e disso

$$\begin{aligned} l_3 =& x_4 - x_3 \\ =& 24h \sin\alpha \end{aligned}$$

De forma que podemos afirmar que a relação entre as distâncias que separa os diferentes quiques é $l_1 : l_2 : l_3 : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots$

2a Considere um sistema termodinâmico constituído de um gás particular, que está encerrado dentro de um cilindro com um pistão móvel. Observa-se que as paredes são adiabáticas, um aumento quase estático no volume resulta num decréscimo da pressão de acordo com a equação

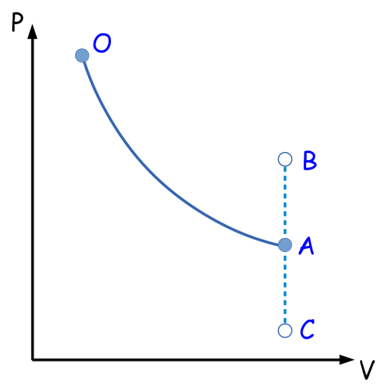
$$PV^{5/3} = C_1$$

onde C_1 é uma constante. Uma pequena pá está instalada dentro do sistema e é girada por um motor externo (por meio de um acoplamento magnético através da parede do cilindro). Sabendo que o motor exerce um torque τ, girando a pá com uma velocidade angular ω, mostre se é possível calcular a diferença de energia entre dois estados quaisquer se supomos que a pressão do gás a volume constante aumenta segundo uma taxa dada pela relação

$$\frac{dP}{dt} = C\frac{\omega\tau}{V}$$

para os casos em que a constante C está dada por (a) $C = \frac{2}{3}$ ou (b) $C = \frac{2}{5}$

Solução:



Vamos admitir que o estado $O \equiv (P', V')$ seja o estado de referência. A partir deste estado podemos atingir o estado $A \equiv (P_A, V_A)$ via um processo reversível adiabático (ou seja A está sobre a adiabáticas $PV^{5/3} = C_1$ que passa por O). A diferencia de energia $U_A - U_O$ é igual ao trabalho realizado sobre o sistema ao passar pela adiabática desde O até A:

$$\begin{aligned} U_A - U_O =& \int_{V'}^{V_A} \frac{C_1}{V^{5/3}} dV \\ =& \frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P'V' \\ \Rightarrow U_A =& \frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P'V' \end{aligned}$$

onde utilizamos $C_1 = P_A V_A^{5/3} = P'V'^{5/3}$ e $U_O = 0$ (dado que o ponto O foi escolhido como o estado referência). A expressão anterior é a energia para qualquer estado sobre a adiabática que passa por O. Para outros estados fora dessa adiabática a expressão anterior não seria válida, por exemplo o estado B da figura. Contudo, o processo adiabática irreversível de agitação das pás do fluído resultará em outro estado que poderá estar (está) fora da adiabática analisada.

Vamos supor que o estado resultante da agitação das pás no fluído é o estado $B \equiv (P_B, V_B)$. Suporemos, por comodidade, que tal estado corresponde a um ponto no diagrama de Clapeyron onde $V_B = V_A$ e $P_A > P_B$, dessa forma dizemos que o ponto B está por cima da adiabática. O trabalho feito pelas pás sobre o sistema está dado por

$$
\begin{aligned}
U_B - U_A &= \int_A^B dW^{adia} \\
&= \int_A^B \tau d\theta \\
&= \int_A^B \tau\omega dt \\
&= \int_A^B \frac{V}{C}\frac{dP}{dt} dt \\
&= \frac{V}{C}\int_{P_A}^{P_B} dP \\
&= \frac{1}{C}\left(P_B V_B - P_A V_A\right)
\end{aligned}
$$

onde se utilizou $V_B = V_A$.

Para o caso em que $C = 2/3$,

$$
\begin{aligned}
U_B - U_A &= \frac{3}{2}P_B V_B - \frac{3}{2}P_A V_A \\
U_B &= \frac{3}{2}P_B V_B - \frac{3}{2}P_A V_A - \left(\frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P'V'\right) \\
\Rightarrow U_B &= \frac{3}{2}P_B V_B - \frac{3}{2}P'V'
\end{aligned}
$$

Observe que o estados por debaixo da adiabática original não pode ser atingido mediante o trabalho adiabático irreversível feito pelas pás, contudo, sim é possível partir do estado $C \equiv (P_C, V_C)$, onde $V_C = V_C$ e $P_A < P_B$, e atingir o ponto B via o trabalho irreversível feio pelas pás, assim de forma similar ao passo anterior,

$$
\begin{aligned}
U_A - U_C &= \frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P_B V_B \\
\Rightarrow U_B &= \frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P'V'
\end{aligned}
$$

de onde podemos generalizar que para qualquer estado do sistema é valido que

$$
U = \frac{3}{2}PV - \frac{3}{2}P'V'
$$

onde (P', V') definem o estado de referencia.

Para o caso em que $C = 2/5$,

Ao longo da adiabática continua sendo válido que

$$U_A = \frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P'V'$$

mas fora da adiabática teremos que, por exemplo para o ponto B:

$$\begin{aligned}
U_B - U_A =& \frac{5}{2}P_B V_B - \frac{5}{2}P_A V_A \\
U_B =& \frac{5}{2}P_B V_B - \frac{5}{2}P_A V_A - \left(\frac{3}{2}P_A V_A - \frac{3}{2}P'V'\right) \\
\Rightarrow U_B =& \frac{5}{2}P_B V_B - \frac{3}{2}P'V' - P_A V_A
\end{aligned}$$

o qual é um resultado impossível dado que a energia interna é uma função de estado e consequentemente não pode depender dos parâmetros termodinâmicos que definem um outro estado.

2b Um sistema termodinâmico particular obedece as seguintes equações de estado:

$$T = \frac{3As^2}{v} \tag{7}$$
$$P = \frac{As^3}{v^2} \tag{8}$$

onde A é uma constante. Encontre μ como função de s e v. A partir daí encontre a equação fundamental[1].

Solução:

Como a energia interna é uma função de estado extensiva e como todas as variáveis termodinâmicas extensivas são funções homogêneas de grau I nos parâmetros intensivos podemos aplicar o teorema de Euler a fim de expressar a energia interna em função dos parâmetros que definem o estado:

$$U(S,V,N) = S\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} + V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} + N\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)$$
$$U = ST - PV + \mu N \tag{9}$$

de onde

$$dU = TdS + SdT - PdV - VdP + \mu dN + Nd\mu$$

A I lei da termodinâmica nos diz

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

eliminando dU

$$0 = SdT - VdP + Nd\mu$$

e dividindo por N obtemos

$$d\mu = -sdT + vdP \tag{10}$$

que é a equação de equação de Gibbs-Duhem (se você sabia essa equação podia ter partido direto deste ponto).

Da primeira equação do problema temos:

$$dT = 6Asv^{-1}ds - 3As^2v^{-2}dv$$

e da segunda:

$$dP = 3AS^2v^{-2}ds - 2As^3v^{-3}dv$$

substituindo em 10

[1] Questão anulada devido a erro de digitação, foi trocado o P por T na equação 8

$$
\begin{aligned}
d\mu =& - 6As^2v^{-1}ds + 3As^3v^{-2}dv + 3AS^2v^{-1}ds - 2As^3v^{-2}dv \\
=& - 3AS^2v^{-1}ds + As^3v^{-2}dv \\
=& - Ad\left(s^3v^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

integrando

$$
\mu = -\frac{As^3}{v} + \mu_0
$$

Substituindo na equação de Euler (9) este resultado e as equações de estado dadas no problema e passando estas equações de sua forma molar para a forma extensiva

$$
\begin{aligned}
U =& TS - PV + \mu N \\
=& \frac{3AS^3}{NV} - \frac{AS^3}{NV} - \frac{AS^3}{NV} + \mu_0 N
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
U = \frac{AS^3}{NV} + \mu_0 N
$$

3a Um modelo para uma molécula que pode rotar livremente, porém não pode vibrar, consiste em duas massa ligadas por uma haste . Nessa configuração o momento de inercia em torno do eixo de simetria que liga as massa pode ser considerado como igual a zero. Calcule o C_v para um gás constituído por esse tipo de partículas utilizando o teorema de equipartição.

Solução:

O teorema de equipartição da energia diz que por cada termo quadrático na expressão da energia do sistema teremos uma contribuição de $\frac{1}{2}k_BT$ no promédio da energia por molécula. No caso da molécula aqui analisada a energia da molécula é constituída pela sua energia cinética mais a energia de rotação, isto é

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \cancelto{0}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

onde o termo da energia de rotação relacionado ao eixo ao longo da haste foi desprezado como indica o problema (além disso $I_2 = I_3$ por simetria).

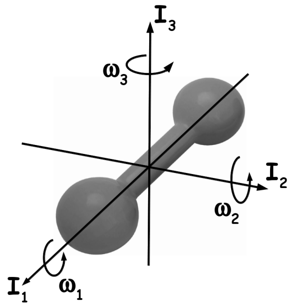


Figura 2: Molécula diatômica simples

Assim a energia interna de uma mole de um gás diatômico estará dada pela energia de uma molécula vezes o número de molécula numa mole de gás

$$\begin{aligned} U =& 5N_a\left(\frac{1}{2}k_BT\right) \\ =& \frac{5}{2}N_ak_BT \end{aligned}$$

onde N_a é a constante de Avogadro. Da expressão anterior calculamos C_v:

$$\begin{aligned} C_v =& \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v \\ =& \frac{5}{2}N_ak_B \\ =& \frac{5}{2}R \end{aligned}$$

3b Suponha que a energia acústica é transportada a través de uma estrutura cristalina em quantidades quantizadas de valor $h\nu$ por quase partículas que chamaremos de fônons, os quais são bósons. Obtenha a expressão matemática para a energia acústica (vibracional) que poderá ser portada por um grupo de dn fônons dentro de uma rede sabendo que a densidade de estado de ocupação dos fônons está dada por

$$g(\nu) = \frac{9N}{\nu_d^3}\nu$$

onde ν_d é a frequência de Debye.

Solução:

Como os fônons são bósons a estatística adequada para descrever a suas propriedades física é a estatística de Bose-Einstein

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1}$$

Considerando o anterior, o número médio de fônons, dn, com frequências no intervalo ν e $\nu + d\nu$ está dado por

$$\begin{aligned} dn =& g(\nu) f_{BE} d\nu \\ =& \left(\frac{9N}{\nu_d^3}\nu\right)\left(\frac{h\nu}{e^{E/k_B T} - 1}\right) d\nu \end{aligned}$$

A energia de cada fônon está dada por $E = h\nu$, por tanto, a energia média transportada por dn fônons será

$$\begin{aligned} dE =& E dn \\ =& \frac{9Nh}{\nu_d^2} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \end{aligned}$$

4A) Uma casca cilíndrica grossa e longa cuja seção transversal possui raio interno a e raio externo $3a$ é feita de material dielétrico, com polarização elétrica permanente dada por

$$\vec{P} = \frac{k}{r^2}\hat{r} \quad ,$$

onde k é uma constante, r é a distância de um ponto até o eixo do cilindro, e $\vec{r}$, a respectiva direção. O campo elétrico para $r = 2a$ é:

e) Nenhuma das anteriores.

Temos que a densidade de carga de polarização volumétrica é

$$\rho_l = -\vec{\nabla}.\vec{P} = \frac{k}{r^3} \quad .$$

Aplicando a lei de Gauss integral, obtemos

$$E(r = 2a) = -\frac{k}{4a^2\varepsilon_0}$$, resposta e).

4B) A bobina de Helmholtz é um dispositivo frequentemente utilizado para se obter um campo magnético relativamente uniforme em uma pequena região do espaço. Ela consiste de duas bobinas circulares de raio a e com um eixo comum, separadas por uma distância h. Se cada uma dessas bobinas possui N espiras e é percorrida por uma corrente I, e se $h = a$, a magnitude do campo magnético no ponto médio do sistema será:

a) $\dfrac{8\mu_0 NI}{5a\sqrt{5}}$

Aplicando a lei de Biot-Savart para o eixo de uma espira de raio a:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(z^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

considerando duas bobinas de N espiras, o campo no ponto médio é dado pela alternativa a).

5A) Uma espira quadrada de lado a e resistência R está a uma distância d de um fio reto infinito pelo qual passa uma corrente constante I. Repentinamente essa corrente vai a zero. Determine a carga total que passa por um ponto da espira durante o tempo em que a corrente induzida na espira flui.

d) $\frac{I\mu_0 a}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{a}{d}\right)$

O campo magnético a uma distância r do fio é dado por $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Calculando o fluxo na espira, e considerando que $\varepsilon = RI = R\frac{dQ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$, concluímos que a carga é dada pela resposta d).

5B) Uma espira de fio, quadrada e com lados de comprimento a, está no primeiro quadrante do plano xy, com um dos vértices na origem. Encontre a força eletromotriz induzida na espira, se nessa região, o potencial vetorial é dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = 2kt^2\left(5xy^3\hat{y} + y^4\hat{x}\right) ,$$

onde k é uma constante.

e) Nenhuma das anteriores.

Calcula-se primeiro o campo magnético, $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ e então o fluxo através da espira, $\Phi = \int \vec{B}.d\vec{a}$. Então $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -ka^5 t$.

6A) Uma carga pontual q de massa m é liberada do repouso a uma distância d de um plano condutor infinito aterrado. Quanto tempo a carga irá demorar para atingir o plano? (despreze a gravidade)

c) $\dfrac{d\pi}{q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$

Considerando que a força sobre a carga será a mesma de uma carga imagem a uma distância d abaixo do plano, essa força será

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d^2}\,.$$

Teremos então, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{A}{x^2}$, integrando a equação duas vezes (com as constantes adequadas, e usando a integral do formulário) obtemos a resposta c).

6B) Considere a colisão de um fóton com um próton (de massa de repouso m) em repouso, produzindo um píon (de massa de repouso μ) e um nêutron (de massa m, aproximadamente). A frequência mínima do fóton para que esse processo ocorra é:

d) $\nu = \dfrac{\left(\mu^2 + 2m\mu\right)c^2}{2hm}$

A soma dos 4-momentos ao quadrado das partículas antes e depois da colisão se conserva. Calculando e resolvendo para a frequência, obtemos a resposta acima.

7A) Dada a função de onda unidimensional

$\psi(x) = Ae^{-ax}$ para $x > 0$

$\psi(x) = Ae^{ax}$ para $x < 0$

Determine a probabilidade, de numa medida, se encontrar a partícula entre $x = 1/a$ e $x = 2/a$.

A) ( ) $P = 1/2$

B) ( ) $P = ae^{-2}$

C) ( ) $P = e^{-1} - e^{-2}$

D) (x) $P = \dfrac{e^{-2} - e^{-4}}{2}$

E) ( ) A função não é normalizável, logo não podemos saber a probabilidade.

Gabarito:

Normalizando temos: $1 = A^2\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2ax}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2ax}dx\right)$ a que resulta $A = \sqrt{a}$.

Com esse resultado, calculamos $P = a\left(\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} e^{-2ax}dx\right)$ resultando $P = \dfrac{e^{-2} - e^{-4}}{2}$

7B) As auto funções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são tais que $H\psi_n(x) = (n + 1/2)\hbar\omega\psi_n(x)$, onde H é a hamiltoniana do oscilador harmônico. Para o estado quântico $\Psi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\psi_1(x) + \sqrt{\dfrac{1}{3}}\psi_2(x)$ determine o valor esperado da energia total do sistema.

A) $\langle E\rangle = \dfrac{11}{6}\hbar\omega$ x

B) $\langle E\rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\hbar\omega$

C) $\langle E\rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\hbar\omega$

D) $\langle E\rangle = \dfrac{9}{2}\hbar\omega$

E) Nenhuma das anteriores.

Gabarito: A função está normalizada, então:

$$\langle E\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 2|\right)H\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle\right)$$

Como $H\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\dfrac{1}{3}}|2\rangle\right) = \left(\left\{1 + \dfrac{1}{2}\right\}\sqrt{\dfrac{2}{3}}|1\rangle + \left\{2 + \dfrac{1}{2}\right\}\sqrt{\dfrac{1}{3}}|2\rangle\right)\hbar\omega$

E como as auto-funções são ortogonais, temos então

$\langle E\rangle = \dfrac{11}{6}\hbar\omega$.

8A) Um átomo de hidrogênio está no estado quântico $\Psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{2,1,-1}+\psi_{2,1,0}\right)$, sendo $\psi_{n,l,m}$ as auto-funções do átomo sem considerarmos o spin. A soma do valor esperado de L^2 com o valor esperado de L_z^2 para o estado $\Psi(r,\theta,\varphi)$ será:

A) $\left\langle L^2\right\rangle+\left\langle L_z^2\right\rangle=3\hbar^2$

B) $\left\langle L^2\right\rangle+\left\langle L_z^2\right\rangle=5\hbar^2$

C) $\left\langle L^2\right\rangle+\left\langle L_z^2\right\rangle=7\hbar^2$

D) $\left\langle L^2\right\rangle+\left\langle L_z^2\right\rangle=\frac{5}{2}\hbar^2$ x

E) Nenhuma das anteriores.

Gabarito:

$$L_z^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{2,1,-1}+\psi_{2,1,0}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hbar^2\psi_{2,1,-1}+0\psi_{2,1,0}\right)$$

O que resulta

$$\left\langle L_z^2\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\hbar^2\right)$$

Temos também:

$$L^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{2,1,-1}+\psi_{2,1,0}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\hbar^2\psi_{2,1,-1}+2\hbar^2\psi_{2,1,0}\right)$$

O que resulta

$$\left\langle L^2\right\rangle=2\left(\hbar^2\right)$$

Ou seja

$$\left\langle L^2\right\rangle+\left\langle L_z^2\right\rangle=\frac{5}{2}\hbar^2$$

8B) Considere uma partícula numa caixa unidimensional de comprimento L. Calcule a razão $\frac{\Delta E_n}{E_n}$, onde E_n é a energia de um estado com número quântico n e ΔE_n é a diferença entre E_{n+1} e E_n.

A) $\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{1}{n}$

B) $\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{1}{2}$

C) $\frac{\Delta E_n}{E_n} = 2$

D) $\frac{\Delta E_n}{E_n} = n$

E) Nenhuma das anteriores x

Gabarito.
A energia de poço quadrado é $E_n = E_0 n^2$ logo

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}$$

9A) Considere que num instante $t = 0,$ um tem seu momento linear dado por $p = p_0$ Determine, no formalismo de Heiserberg, qual a equação que define a evolução temporal do operador p, dado que o sistema é descrito pela hamiltoniana unidimensional

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + gx.$$

A) $p(t) = p_0$

B) $p(t) = p_0 + gt$ x

C) $p(t) = 0$

D) $p(t) = -i\hbar t$

E) Nenhuma das anteriores.

Gabarito.
Usando $\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[p,H]$, e como $[p,H] = -i\hbar$ obtemos $p(t) = p_0 + gt$.

9B) O valor do comutador $\left[x, p^2\right]$ é:

A) $i\hbar$

B) 0

C) $2i\hbar p$ x

D) $i\hbar p^2$

E) Nenhuma das anteriores.

Gabarito:
O método mais fácil é avaliar os colchetes de Poison,
O que resulta $\left\{x, p^2\right\} = 2p$, logo pela correspondência $\left[x, p^2\right] = 2i\hbar p$

10A) Responda se as afirmativas são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.
(Alternativas sem justificativa serão desconsideradas.)

A) ( ) Todo movimento sob ação de força central pode ser reduzido a um movimento em duas dimensões**.**
R: Verdadeira. Bosta lembrar que o vetor momento angular se conserva.

B) ( ) Se dois estados quânticos tem mesma energia, então suas funções de onda são iguais.
R: Falso, sistemas degenerados tem funções de onda distintas.

C) ( ) Se cavarmos um túnel que atravesse a Terra passando pelo centro, a força sentida por alguém que caísse nesse túnel seria proporcional a $\frac{1}{r^2}$ com r sendo medido a partir do centro da Terra.
R: Falso, é proporcional a r

D) ( ) O princípio de exclusão de Pauli afirma que a função de onda de quaisquer duas partículas deve ser antissimétrica por troca de pares.
R: Falso, só se forem idênticas.

E) ( ) Se um corpo carregado é esférico, então sempre podemos considerá-lo como uma carga pontual localizada no seu centro.
R: Falso, só se a distribuição de carga for homogênea.

10B) Responda se as afirmativas são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta. (Alternativas sem justificativa serão desconsideradas.)

A) ( ) O princípio de incerteza proíbe a determinação exata da posição de uma partícula quântica.
R: Falso, só proíbe a determinação do par canônico p-q.

B) ( ) A equação de onda unidimensional $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ implica que a velocidade de propagação de uma onda unidimensional é sempre constante.
R: Falso, a velocidade depende das propriedades do meio.

C) ( ) Se aumentarmos a temperatura de um corpo em um determinado estado, o volume desse corpo sempre aumentará.
R: Falso, vide por exemplo a água.

D) ( ) Se, num átomo de hidrogênio, fizermos uma medida de L_z, seguida de uma medida de L^2, o resultado será o mesmo que se fizermos primeiro a medida de L^2 e posteriormente a medida de L_z.
R: Verdadeiro, esses operadores são compatíveis.

E) ( ) A entropia de qualquer sistema sempre aumenta ou se mantém constante durante um processo termodinâmico.
R: Falso, Só para sistemas isolados.

Formulário.

$$R_{2,1}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{Zr}{a_0}\exp\left(-\frac{1Zr}{2a_0}\right)$$

$$Y_{2,\pm1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\cos\theta sen\theta)\exp(\pm i\phi)$$

$$Y_{2,\pm1} = \sqrt{\frac{15}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\phi}\right)\right]$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L^2 Y_{l,m} = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}$$

$$L_z Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m}$$

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[A, H]$$